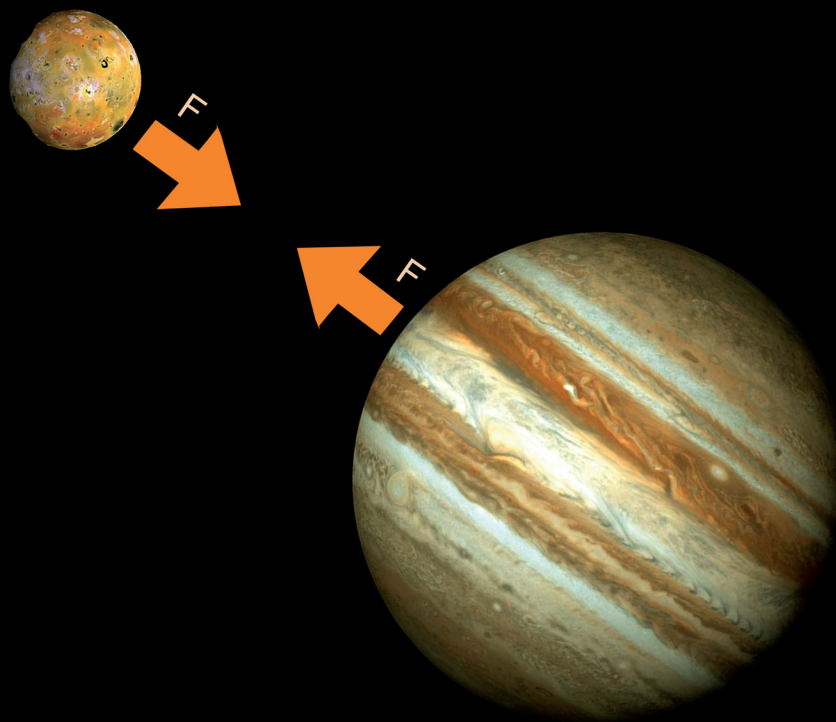


GRAVITACIÓ



Gravitació

Resum:

En aquesta unitat es pretén que els alumnes, mitjançant l'observació de les òrbites dels satèl·lits galileans de Júpiter i de les estrelles properes al centre galàctic, determinin les masses de Júpiter i del forat negre del centre de la Via Làctia.

Continguts:

Les tres lleis de Kepler i la llei de la gravitació de Newton

1. Observació dels satèl·lits de Júpiter
 - Identificació i observació dels satèl·lits
 - Anàlisi de les observacions
 - Determinació de la massa de Júpiter
2. El centre de la Galàxia
 - Metodologia i observacions
 - Determinació de la massa de l'objecte central

Nivell:

Segon cicle d'ESO y batxillerat

Referència:

L'astronomia a les aules. Manual didàctic per a educació primària i secundària

www.astronomia2009.cat/bin/view/Main/Recursos#Manual_didctic_L_astronomia_a_l

Autors:

Carme Jordi (Departament d'Astronomia y Meteorologia de la Universitat de Barcelona)

Robert Estalella (Departament d'Astronomia y Meteorologia de la Universitat de Barcelona)



Coordinadora apunts pedagògics "Con A de Astrónomas":

Josefina F. Ling (Universitat de Santiago)

Ajudants de maquetació y traducció:

Surinye Olarte Vives, Alejandra Díaz Bouza



GRAVITACIÓ

Introducció

La llei de la gravitació de Newton regeix els moviments dels cossos celestes (deixant de banda els efectes de la Relativitat General). L'observació dels moviments de planetes, satèl·lits, cometes i estrelles, permet deduir les equacions empíriques de Kepler i també determinar les masses dels cossos en moviment.

L'objectiu és proporcionar material al professor per realitzar exercicis per deduir les masses al Sistema Solar i fins i tot al centre de la Galàxia. El professor pot adaptar el nivell dels exercicis i la seva profunditat al nivell del curs que imparteix.



Imatge de Júpiter i els quatre satèl·lits galileans,
tal com s'observa amb telescopis de petites dimensions

Les tres lleis de Kepler i la llei de la gravitació de Newton

En Johannes Kepler va deduir tres lleis per al moviment dels planetes entorn del Sol a partir de les seves pròpies observacions i de les del seu mestre Tycho Brahe. Les tres lleis són:

1. Els planetes descriuen òrbites el·líptiques i el Sol és en un dels focus (Fig 1)

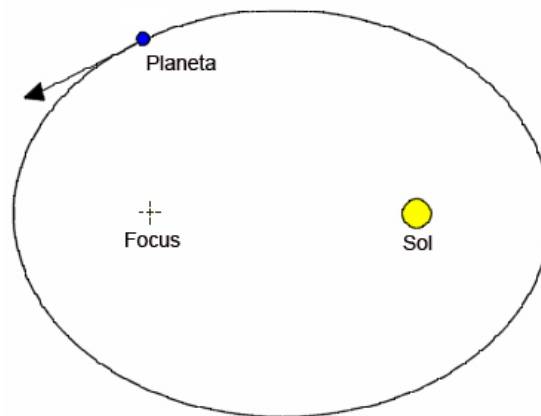


Fig. 1 Òrbita el·líptica d'un planeta a l'entorn del Sol

2. El radi vector que uneix el Sol amb el planeta escombra àrees iguals en temps iguals (Llei de conservació de les àrees, Fig 2):

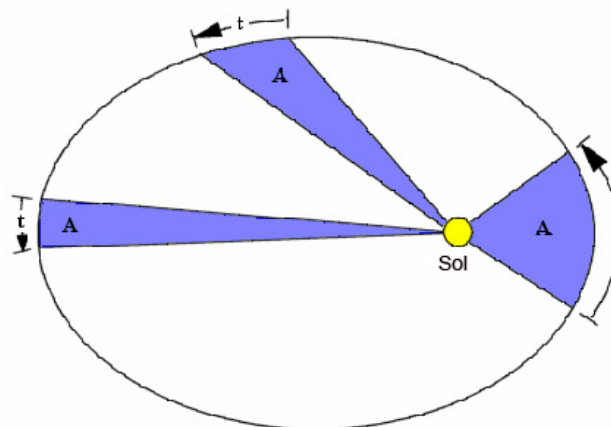


Fig. 2 Representació de la llei de les àrees: les àrees blaves són totes iguals

3. El període P de translació al voltant del Sol al quadrat és proporcional al semieix major de l'òrbita d al cub:

$$P^2 \text{ és proporcional a } d^3$$

Els valors dels períodes P (expressats en anys) i dels semieixos d (expressats en unitats del semieix de l'òrbita de la Terra) de les òrbites els podeu veure a la següent taula:

	$P(\text{anys})$	$d (d_{\text{Terra}})$	P^2/d^3
Mercuri	0.24	0.387	1
Venus	0.615	0.723	1
Terra	1	1	1
Mart	1.88	1.524	1
Júpiter	11.86	5.203	~1
Saturn	29.457	9.539	~1
Urà	84.36	19.24	1
Neptú	165.5	30.14	1

[Aquí el professor pot fer notar les proporcions entre les distàncies mitjanes d , les proporcions entre els anys, pot fer calcular el quocient P^2/d^3 perquè els alumnes comprovin ells mateixos la igualtat de tots els quocients. El professor també pot canviar les unitats suposant per exemple que agafem Mart com a referència i no la Terra.]



Johannes Kepler, 1571-1630



Isaac Newton 1642-1727

La formulació de la llei de la gravitació per part de l'Isaac Newton anys més tard com a

$$\vec{F} = \frac{G M m}{r^3} \vec{r}$$

permet deduir les lleis empíriques de Kepler i les generalitza a qualsevol cas de dos cossos massius que s'exerceixen atracció gravitacional mútua: un planeta i un satèl·lit (natural o artificial), el Sol i un cometa, dues estrelles, etc.

En particular, de la llei de la gravitació es dedueix que si un cos de massa m descriu una òrbita el·líptica de semieix d a l'entorn d'un cos de massa M amb un període P :

$$G (M + m) = \frac{4\pi^2}{P^2} d^3$$

i si la massa M és molt més gran que m , com en el cas del Sol que és molt més massiu que un planeta, podem menysprear m i llavors:

$$\frac{G M}{4\pi^2} \sim \frac{d^3}{P^2}$$

i per tant, deduïm que P^2 és proporcional a d^3 , que no és res més que la tercera llei de Kepler.

Metodologia:

Els exercicis que proposem són:

1. Determinació de la relació entre la massa de Júpiter i la massa del Sol, mitjançant l'observació del moviment dels satèl·lits de Júpiter
2. Determinació de la massa del forat negre del centre de la Galàxia, mitjançant l'observació del moviments de les estrelles del seu entorn

La primera activitat es realitza mitjançant observacions amb el telescopi. En cas de no tenir telescopi, o en el cas de voler fer una simulació prèvia a la sessió d'observació, és molt útil utilitzar un programa de franc (en anglès) que es pot descarregar des del web del projecte CLEA: <http://www3.gettysburg.edu/~marschal/clea/juplab.html>

1. Observació dels satèl·lits de Júpiter

Aquest experiment combina observació amb càlcul seguint la mateixa metodologia que ja es va seguir al segle XVI i que va permetre de determinar la relació entre la massa de Júpiter i la del Sol.

1.1 Objectius

- Observació dels satèl·lits galileans de Júpiter (Io, Europa, Ganímedes i Cal·listo)
- Determinació dels seus períodes
- Determinació de les distàncies mitjanes al planeta
- Determinació de la massa de Júpiter

1.2 Material

- Telescopi
- Paper per dibuixar-hi a escala (si es fa en paper mil·limetrat o quadriculat és més fàcil) o també es pot fer servir qualsevol programa gràfic d'ordinador
- Calculadora

1.3 Identificació dels satèl·lits

A continuació es dona un algorisme per calcular l'elongació de cada satèl·lit galileà respecte a Júpiter, en unitats de radis de Júpiter, per a un dia i un temps donats. Un valor positiu de l'elongació significa que el satèl·lit és a l'est de Júpiter, i un valor negatiu, a l'oest.

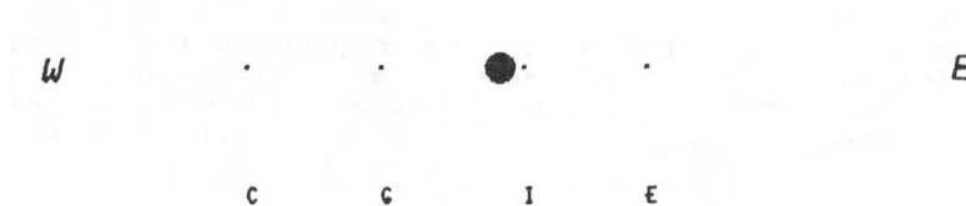


Figura 1.1: Júpiter i els 4 satèl·lits galileans identificats amb les seves inicials

Algorisme:

Entrada	Càlcul	Dades	
ANY(>1988)	$A = \text{ANY} - 1989$ $X = 365 * A + \text{INT}(A/4)$	MES	M
		1	0
		2	31
MES(1-12)	$X = X + M(\text{MES})$ (valors de la taula) si $(\text{MES} > 2 \text{ i ANY bixest}) X = X + 1$	3	59
		4	90

DIA	$X = X + \text{DIA}$	5	120
		6	151
		7	181
	X és el nombre de dies des del 0 gener 1989	8	212
		9	243
HORA	$T = X + \text{HORA}/24$	10	273
		11	304
MIN	$T = T + \text{MIN}/1440$	12	334

Càlcul per a Ío		Càlcul per a Europa	
$\text{FASE} = 203.40586 \cdot (T + 0.7448)$ (graus) $E = 6.9 \cdot \sin(\text{FASE})$ (radis de Júpiter)		$\text{FASE} = 101.29163 \cdot (T + 2.9205)$ (graus) $E = 9.4 \cdot \sin(\text{FASE})$ (radis de Júpiter)	
Càlcul per a Ganimedes		Càlcul per a Cal·listo	
$\text{FASE} = 50.234517 \cdot (T + 5.5280)$ (graus) $E = 15 \cdot \sin(\text{FASE})$ (radis de Júpiter)		$\text{FASE} = 21.487980 \cdot (T + 4.3926)$ (graus) $E = 26 \cdot \sin(\text{FASE})$ (radis de Júpiter)	

Si no es vol fer servir aquest algorisme, el projecte CLEA té un mòdul dedicat a Júpiter que permet de fer les simulacions (<http://www3.gettysburg.edu/~marschal/clea/juplab.html>).

1.4 Observació dels satèl·lits

L'observació s'ha de fer cada dues hores per a Ío i Europa; per Ganimedes, durant un mínim de quatre dies amb dues o tres observacions diàries; per Cal·listo un mínim de vuit dies amb una o dues observacions diàries.

Enfoqueu amb el telescopi a Júpiter i als satèl·lits, i mitjançant la predicció que heu fet amb l'algorisme, identifiqueu-los tots. Dibuixeu les seves posicions respecte al planeta en el paper mil·limetrat (o directament sobre ordinador). Mesureu la distància al planeta, en unitats de radis de Júpiter, i anoteu el valor juntament amb el temps en què s'ha fet l'observació a la taula següent:

Distàncies al centre de Júpiter, en radis de Júpiter					
Dia	Hora	Ío	Europa	Ganimedes	Cal·listo

1.5 Anàlisi de les observacions

Dibuixeu en una gràfica els valors de les distàncies obtingudes en funció del temps de l'observació, i determineu el valor màxim de la distància del satèl·lit a Júpiter (r_0).

Agafeu dos punts observats de la corba, un a cada costat del màxim, i anoteu els valors de les distàncies, en radis de Júpiter, (r_1 i r_2) i els temps (t_1 i t_2) d'observació (vegeu Fig. 1.2).

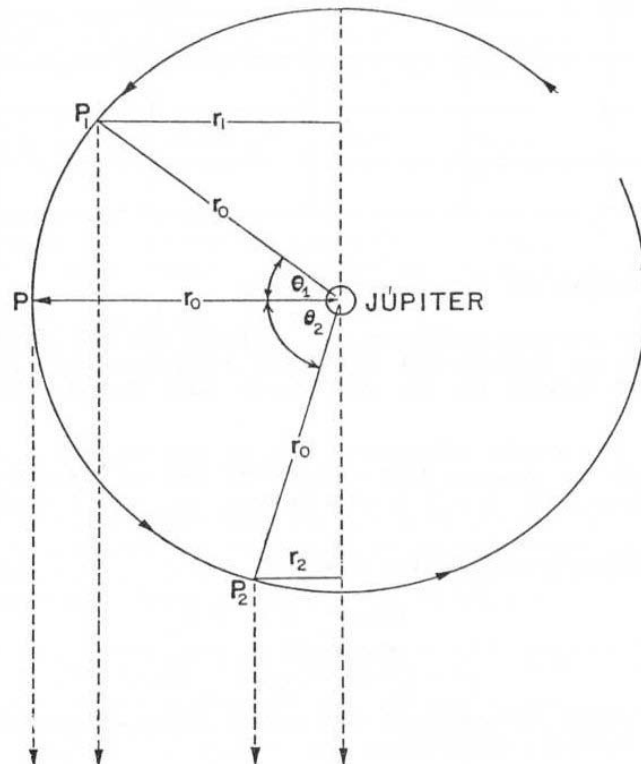


Figura 1.2: Moviment d'un satèl·lit a l'entorn de Júpiter en una òrbita circular

De la figura anterior podem deduir:

$$\cos\theta_1 = \frac{r_1}{r_0}; \cos\theta_2 = \frac{r_2}{r_0}$$

Per a calcular el període del satèl·lit, si suposem una òrbita circular, tindrem:

$$P \text{ (dies)} = 360^\circ \frac{t_2 - t_1}{\theta_2 - \theta_1}$$

on els temps s'han d'expressar en dies i fracció de dia. El radi de l'òrbita del satèl·lit al voltant de Júpiter serà:

$$d \text{ (km)} = R \cdot r_0$$

on R és el radi de Júpiter, en quilòmetres (71400 km), i r_0 és la distància màxima obtinguda, en radis de Júpiter. Perquè els professors ho tinguem com a referència, els resultats haurien de ser els de les dues primeres columnes de la taula següent (podeu fer-ho amb r_0 o amb d):

	$P(\text{dies})$	$r_0 (R_{\text{Júpiter}})$	P^2/r_0^3
Ió	1.769	5.91	~66
Europa	3.551	9.40	~66
Ganímedes	7.155	15.0	~66
Cal·listo	16.69	26.4	~66

Podeu fer calcular el quocient P^2/r_0^3 als alumnes i fer-los notar que el resultat també dona una constant, perquè també regeix la tercera llei de Kepler.

En les observacions visuals l'estimació de la distància dels satèl·lits a Júpiter depèn molt de l'observador: uns tendeixen a sobrevalorar la distància i d'altres a subvalorar-la. És bo que l'experiment el realitzin diversos alumnes de manera que tinguem força mesures i puguem minimitzar els errors personals. Si el professor ho creu convenient pot fer una discussió del concepte de la mitjana i la dispersió dels valors deduïts per diversos alumnes, del rebuig de mesures molt discordants, etc, o sigui bàsicament introduir els alumnes als conceptes de tractament estadístic.

1.6 Determinació de la massa de Júpiter

Passeu el període P a anys (1 any = 365,2422 dies) i el radi d a unitats astronòmiques (UA) (1 UA = $149,6 \cdot 10^6$ km). La massa de Júpiter la podem calcular mitjançant l'expressió:

$$M = \frac{d^3}{P^2}$$

on M s'obté en masses solars. Calculeu la mitjana de les masses calculades a partir dels diferents satèl·lits.

1.7 Qüestions

- Quines de les lleis de Kepler sobre el moviment planetari s'han fet servir? Quines hipòtesis addicionals sobre la massa i l'òrbita dels satèl·lits galileans s'han considerat?
- Quins són els principals errors comesos en fer l'estimació de les distàncies dels satèl·lits a Júpiter?
- Els estels coneguts amb menys massa tenen una massa de l'ordre de la quarta part del Sol. Quant més massiu hauria de ser Júpiter perquè pogués brillar com un estel?

1.8 Exercicis addicionals

- Podeu passar la massa de Júpiter a kilograms i també la seva relació a la massa de la Terra sabent que $M_{\text{Sol}} = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg} = 332,932 M_{\text{Terra}}$
- Compareu la força de la gravetat a la superfície de Júpiter amb la de la Terra i la del Sol. Evidentment, podeu comparar amb qualsevol planeta i lluna del Sistema Solar. Per a tenir-ne informació busqueu per exemple al lloc web de “Nine Planets” <http://www.nineplanets.org/>
- Podeu comparar la força d'atracció del Sol sobre de la Terra i sobre de Júpiter
- Podeu prendre l'òrbita d'un cometa i calcular la força atractiva del Sol al periheli i a l'afeli

2. El centre de la Galàxia

La Galàxia que habitem conté 100 mil milions d'estrelles, més gas i pols. Tot plegat està en rotació a l'entorn del centre galàctic. Basant-nos en la tercera llei de Kepler altre cop, o sigui en la llei de la gravitació, calcularem la massa de l'objecte situat al centre galàctic.

2.1 Objectius

- Determinació de la massa de l'objecte central
- Deducció que es tracta d'un forat negre

2.2 Metodologia

- Obtenció d'observacions d'estrelles prop del centre galàctic
- Estudi del moviment d'aquestes estrelles
- Aplicació de la tercera llei de Kepler

2.3 Observacions

No podem observar el centre galàctic amb alta resolució amb els telescopis que tenim normalment al nostre abast. Es requereixen observacions amb telescopis especialitzats i de gran diàmetre. Per això farem servir observacions disponibles a la xarxa.

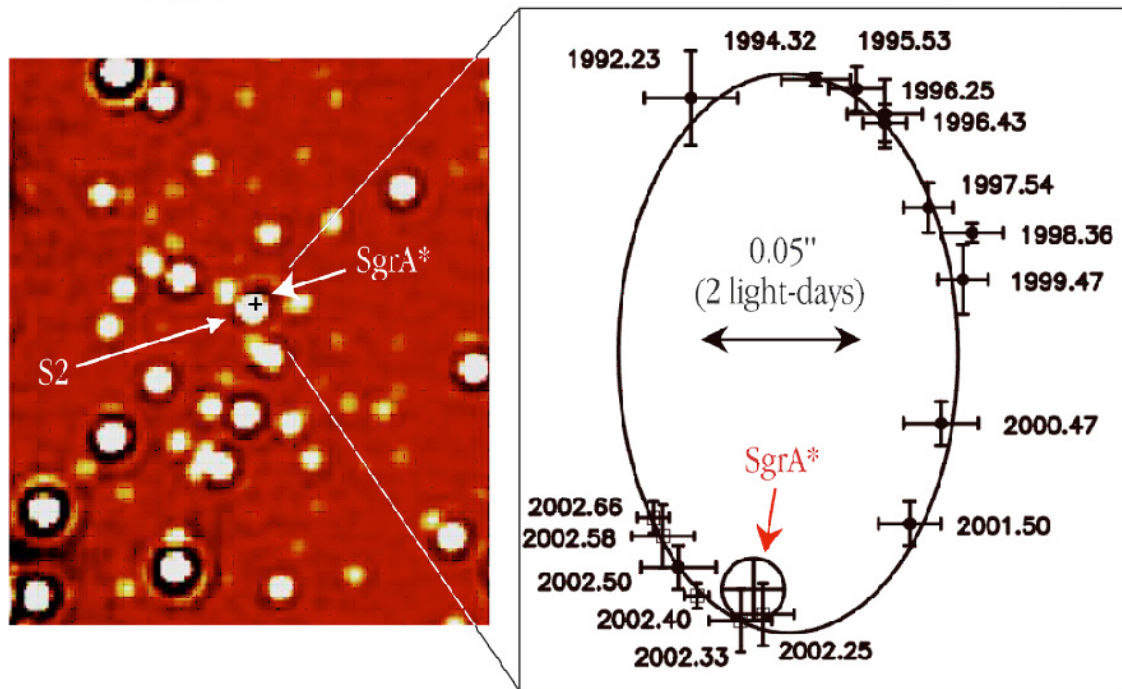
Per exemple, podem prendre les primeres imatges que es van publicar l'any 2002 per part de científics de l'Observatori Europeu del Sud (ESO), i que es mostren a la Fig. 2.1. El lloc web és: <http://www.eso.org/public/outreach/press-rel/pr-2002/pr-17-02.html>. A la figura de l'esquerra es pot observar el conjunt d'estrelles prop del centre. Hi és assenyalada l'estrella anomenada S2. A la figura de la dreta es veu el moviment d'aquesta estrella al llarg de 10 anys.

2.4 Determinació de la massa de l'objecte central

Es tracta d'una òrbita el·líptica semblant a la dels planetes a l'entorn del Sol. El càlcul de l'òrbita dona un període de 15,73 anys.

- Mesureu el semidiàmetre de l'òrbita, considerant l'escala que s'indica a la figura (la mida de la sageta equival a l'espai que recorre la llum en 2 dies; la velocitat de la llum és de 300.000 km/s)
- Apliqueu la tercera llei de Kepler, tal com heu fet per al cas de la parella Sol-Júpiter a la parella Centre-Estrella S2
- Deduïu la massa de l'objecte al centre de la Galàxia

S2 Òrbita al voltant de SgrA*



El moviment d'una estrella al voltant del forat negre de la Via Làctea

ESO PR Photo 23c/02 (9 October 2002)

© European Southern Observatory



Figura 2.1: Estrelles prop del centre galàctic i òrbita de l'estrella S2

2.5 Exercicis addicionals

L'objecte central és molt massiu, però no llueix pas com milions de vegades el nostre Sol. De fet, a la Fig 2.1 (esquerra) només es veuen estrelles. És perquè l'objecte central és molt massiu i també molt compacte tracta. Es tracta d'un forat negre.

- Calculeu la distància al centre del forat negre a la qual la velocitat d'escapament és igual a la velocitat de la llum
- Compareu el valor de la gravetat a aquesta distància amb la gravetat a la superfície de la Terra o del Sol

El Sol descriu una òrbita pràcticament circular a l'entorn del centre galàctic amb un radi d'uns 28000 anys llum i amb un període de 250 milions d'anys

- Calculeu la velocitat lineal del Sol
- Quina massa hi ha situada entre el centre galàctic i el Sol per tal que es mogui a aquesta velocitat ?

Material adicional

Broman, L., Estalella, R., Ros, R.M. 1993,

Experimentos de astronomía,

Colección Biblioteca de Recursos Didácticos. Alhambra, Madrid, Spain (ISBN 84-205-1717-8), 123 pag (2ª edició)

Estalella, R. 2002,

Teaching Astronomy, How and Why?,

6th International Conference on Teaching Astronomy. Ed. R.M. Ros. Unitat de Formació de Formadors, Universitat Politècnica de Catalunya, 27-42, Barcelona, Spain

Estalella, R., Cid, S., García-Luengo, E., Molins, M., Muntané, M., Padullés, M.C., Trabal, M. 1995,

Astronomía en la escuela,

Colección Dossiers Rosa Sensat, n. 5, Associació de Mestres Rosa Sensat y Ministerio de Educación y Ciencia, Madrid-Barcelona, Spain (ISBN 84-89149-18-6), 111 pag.

Estalella, R., Jordi, C. 1996,

Meeting with Science: Astronomy,

5th International Conference on Teaching Astronomy. Ed. R.M. Ros. ICE Universitat Politècnica de Catalunya, 117-119, Barcelona, Spain

Estalella, R., Jordi, C., Rosselló, G., Sanahuja, B., Cid, S. 1992,

Mirant el cel,

Col·lecció Trobada amb la Ciència, n. 69. CIRIT, Generalitat de Catalunya, Spain